This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

184.
a.
46.

MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT

DES NŒUDS DE LA LUNE

ET

SUR L'INÉGALITÉ EN LATITUDE

QUI DONNE LA MESURE DE L'APLATISSEMENT DE LA TERRE

par

M. G. LESPIAULT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

Extrait des Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

---

180 a. 31.

PARIS

CHEZ MALLET-BACHELIER, LIBRAIRE-ÉDITEUR

QUAI DES AUGUSTINS

1861

184. a. 42.

48

Bordeaux. — Typ. Gounouilhou, rue Guiraude, 11 (ancien hôtel de l'Archevêché).

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT DES NŒUDS DE LA LUNE

INTRODUCTION

DÉPLACEMENT DE L'ORBITE LUNAIRE DANS L'ESPACE

Le plan de l'orbite lunaire se déplace constamment sur la sphère céleste, de façon à conserver la même inclinaison moyenne sur l'écliptique, tandis que l'intersection de ces deux plans, ou la ligne des nœuds, est animée d'un mouvement rétrograde, ou contraire à celui de la Lune. La rétrogradation de cette ligne par rapport à la ligne des équinoxes est de 3′ 10″,64 par jour, ce qui correspond à 19° 20′ 30″ par an. Il en résulte que les nœuds de la Lune font une révolution entière contre l'ordre des signes en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ, ou, plus exactement, en 6798^j, 15 par rapport aux équinoxes, et 6793^j, 4 par rapport aux étoiles.

L'inclinaison de l'orbite et le mouvement des nœuds sont assujettis à plusieurs inégalités. L'inclinaison, qui n'est que de 5° 0′ 1″ dans les nouvelles ou les pleines lunes *qui arrivent à 90° des nœuds,* se trouve de 5° 17′ 35″ dans les quadratures *où le Soleil coïncide avec le nœud.* L'inclinaison moyenne est ainsi de 5° 8′ 48″. Ce fut Tycho-Brahé qui fit le premier cette importante observation,

et il reconnut en même temps, dans le mouvement du nœud, une inégalité qui va jusqu'à 1° 45′. Ces deux inégalités se correspondent de telle sorte qu'on peut en obtenir une image géométrique assez simple, en concevant que l'axe de l'orbite éprouve une sorte de nutation autour de la position moyenne qu'il occuperait à chaque instant s'il ne faisait que décrire un cône circulaire autour de l'axe de l'écliptique.

En outre de ces inégalités et de plusieurs autres qui, comme les précédentes, ont une période semi-annuelle ou semi-mensuelle, Laplace a découvert par la théorie, dans le déplacement de l'orbite lunaire, une inégalité dont la période, beaucoup plus étendue, est égale à la durée même de la révolution du nœud. On peut représenter cette inégalité, en concevant que l'orbe lunaire, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec les mêmes conditions sur un plan très-peu incliné à l'écliptique, et passant constamment par les équinoxes entre l'écliptique et l'équateur. Il résulte de là une des équations les plus importantes de la théorie de la Lune, en ce qu'elle dépend de l'aplatissement terrestre, et qu'elle donne cet aplatissement avec une très-grande exactitude, plus exactement peut-être que les mesures géodésiques, ou du moins d'une manière moins dépendante des irrégularités de la figure de la Terre. Un phénomène analogue se reproduit d'une manière plus sensible dans les mouvements des satellites de Jupiter, en vertu de l'aplatissement considérable de cette planète.

Tels sont les faits d'observation dont j'ai cherché une explication simple à l'aide de la théorie des couples. Cette théorie a l'avantage de mettre en relief le côté géométrique des phénomènes, et d'en présenter constamment à l'esprit une image sensible; elle conduit en particulier, d'une façon presque immédiate, à la raison mécanique de l'inégalité qui provient de l'aplatissement terrestre, et permet ainsi de faire rentrer, dans les éléments de la dynamique, la mesure de cet aplatissement par les perturbations du mouvement de la Lune.

CHAPITRE Ier

DU COUPLE QUI ANIME A CHAQUE INSTANT LE SYSTÈME FORMÉ PAR LA TERRE ET LA LUNE, ET DES PERTURBATIONS QU'IL ÉPROUVE.

I

Considérons, à un instant quelconque, le système formé par la Terre et la Lune. Si, dans ce système, dont nous pouvons supposer le centre de gravité total immobile, nous regardons comme des forces les quantités de mouvement des diverses molécules, ces quantités de mouvement ou ces forces se réduisent à trois couples, savoir (1) : le couple qui anime la Terre dans son mouvement diurne de rotation; celui qui anime la Lune; et enfin le couple formé par les deux forces égales, parallèles et contraires, qui emportent les centres de ces deux corps dans leur révolution mensuelle autour de leur centre commun de gravité.

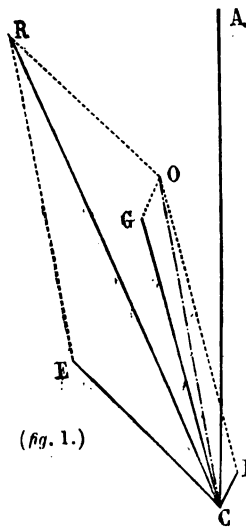
Il résulte des principes généraux de la dynamique, que, s'il n'existait pas d'actions extérieures, la composition de ces trois couples en un seul donnerait, à toutes les époques du mouvement, le même couple résultant, et l'on voit en outre, par les mêmes principes, que la grandeur et la position de ce couple seront troublées à chaque instant par l'action du Soleil, comme si la Terre et la Lune étaient invariablement liées ensemble et ne formaient à chaque instant qu'un seul et même corps solide. L'étude attentive des changements qui résultent ainsi de l'action solaire va nous donner l'explication des phénomènes qui nous occupent.

II

Commençons par chercher quelle est, à un instant donné, la position du couple résultant des quantités de mouvement. Soit C (*fig.* 1) le centre de gravité commun de la Terre et de la Lune;

(1) Voir Poinsot, *Mémoire sur l'équateur du système solaire.*
Id. *Mémoire sur la précession des équinoxes.*

soit CA l'axe de l'écliptique, que nous pouvons regarder comme fixe pendant une durée de la révolution de la ligne des nœuds; soient enfin CG l'axe de l'orbite lunaire, CE et CE′ des lignes respectivement parallèles aux axes de rotation de la Terre et de la Lune; l'angle GCA est environ de 5° 9′, ECA de 23° 27′, ACE′ de 1° 29′. On sait en outre que, d'après les découvertes de Cassini sur la libration réelle de la Lune, les trois droites CG, CA, CE′, restent constamment dans un même plan, CA étant située dans l'angle des deux autres.



(fig. 1.)

Prenons sur la première de ces droites une longueur CG pour représenter l'axe du couple qui emporte les centres de la Terre et de la Lune autour du point C; prenons aussi les longueurs CE et CE′ respectivement proportionnelles aux couples de rotation de la Terre et de la Lune. La composition de ces trois couples en un seul nous donnera en grandeur et en direction l'axe CR du couple résultant.

III

L'action du Soleil modifie à chaque instant la grandeur et la position de ce couple, et nous avons à étudier la marche de ces modifications, en composant le couple infiniment petit envoyé par le Soleil avec le couple CR. Or, c'est ce que l'on peut faire, en cherchant le résultant de ce couple infiniment petit et de CG, pourvu qu'on introduise ensuite les couples CE et CE′. Ce dernier pourrait être négligé à cause de sa petitesse; mais on va voir de plus, par le théorème de Cassini, qu'il peut l'être en toute rigueur pour la solution de notre problème. Car, puisque les droites CG et CE′ sont toujours dans le même plan que CA, la résultante partielle CO est aussi dans ce plan et fait un angle constant avec CG; les mouvements des deux axes CO et CG sont donc liés invariablement, et l'on peut étudier indifféremment sur l'un ou sur l'autre de ces axes, le déplacement qui résulte de sa composition avec le couple perturbateur; on obtiendra, dans les deux cas, le même

changement dans la position du plan GCA. Cela revient à dire que l'existence du couple CE′ n'altère en rien le mouvement de CG.

Quant au couple CE, il est permis, dans une première approximation, de le regarder comme immobile; car le déplacement qu'il éprouve pendant la durée d'une révolution des nœuds de la Lune est bien peu sensible. Or, si ce couple était rigoureusement invariable, nous pourrions dire de CO ce que nous avons dit plus haut de CR. En d'autres termes, cet axe CO, ou, si l'on veut, CG, puisque nous faisons abstraction de CE′, pourrait être considéré comme invariable de grandeur et de position dans le système formé de la Terre et de la Lune, sans actions extérieures.

Ainsi, dans l'hypothèse où nous nous plaçons provisoirement, nous pouvons, au lieu d'étudier le déplacement que le couple perturbateur doit produire sur CR, chercher de quelle manière ce couple déplace CG, considéré, pour le moment, comme le seul couple fini dont le système soit animé. Il est clair que cela revient à regarder, ainsi que l'ont fait tous les géomètres antérieurs à Laplace, la Terre et la Lune comme de simples points matériels, ou bien comme des sphères composées de couches homogènes; nous obtiendrons donc ainsi les perturbations indépendantes de l'aplatissement de ces deux corps. Mais, si nous voulons ensuite revenir à la réalité, nous serons obligés de tenir compte du petit mouvement conique qu'éprouve l'axe CE dans une période de 18 ans, et qui constitue le phénomène de la nutation. L'on peut prévoir, dès à présent, que de là résultera, dans le mouvement de l'axe de l'orbite, une inégalité de même période. Nous verrons plus tard que c'est justement cette inégalité qui conduit à une mesure de l'aplatissement terrestre. Laissons pour le moment ce détail de côté, et résolvons le problème comme si le couple CG était le couple résultant des quantités de mouvement. Le déplacement de cet axe CG détermine le déplacement de l'orbite.

IV

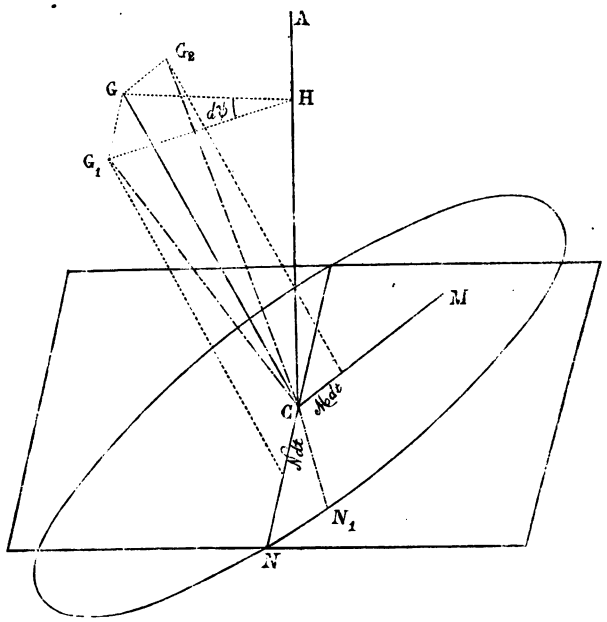
Du couple perturbateur; — sa décomposition en trois autres; — action instantanée de chacun de ces trois couples composants.

Regardons provisoirement, d'après ce qui précède, la Terre et la Lune comme réduites à leurs centres respectifs de gravité, et

considérons les forces qui sollicitent ces deux corps vers le Soleil, réduit également à son centre. Si nous transportons ces forces au centre de gravité commun de la Terre et de la Lune, nous les remplacerons par une résultante unique allant de ce centre au Soleil, et par un couple résultant, constamment situé dans le plan qui passe par les trois corps. C'est là justement le couple perturbateur, c'est-à-dire celui qui doit modifier à chaque instant la grandeur et la direction du couple fini des quantités de mouvement.

Sans chercher, pour le moment, l'expression analytique de ce couple perturbateur g, et quelle que soit cette expression, on peut concevoir qu'à chaque instant dt, ce couple soit décomposé en trois autres rectangulaires entre eux, savoir : le premier, L, situé dans le plan de l'orbite, c'est-à-dire agissant autour de CG (*fig.* 2); le second, N, autour de CN ou de la ligne des nœuds; le troisième, M, autour de CM menée dans l'orbite perpendiculairement à cette ligne. Ces quantités se rapportent à l'unité de temps, ce qui donne Ldt, Ndt, Mdt, pour les trois couples infiniment petits qui agissent sur le système à chaque instant dt.

(*fig.* 2.)



D'après le principe de la composition des petits mouvements,

pour connaître le changement de grandeur et de position qu'éprouve le couple G pendant le temps *dt*, il suffit de chercher le changement qui résulte de l'action de chacun de ces couples composants considéré isolément. Or, ces actions partielles sont faciles à déterminer.

Le couple *Ldt* ne modifie en rien la direction du couple G; mais il altère sa grandeur, et la change en G + *Ldt*; de sorte qu'on a

$$\frac{dG}{dt} = L$$

Ce changement du couple, ou, si l'on veut, de la somme des aires décrites par la Terre et la Lune autour de leur centre commun de gravité, constitue l'inégalité en longitude connue sous le nom de *variation;* on voit qu'elle résulte naturellement de notre théorie, et nous y reviendrons tout à l'heure.

Le couple *Ndt*, composé isolément avec G, donne pour résultante CG_1. Il n'en résulte aucun changement de grandeur; car CG et CG_1 ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; de sorte que CG ne s'accroît, par l'effet de *Ndt*, que d'un infiniment petit du premier ordre dans un temps fini; en d'autres termes, il n'en reçoit aucune variation de grandeur pendant tout le cours du mouvement.

En second lieu, CG et CG_1 peuvent être considérées comme deux génératrices infiniment voisines d'un cône à base circulaire ayant CA pour axe. Les angles qu'elles forment avec cet axe ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; de sorte que l'inclinaison γ de l'axe de l'orbite lunaire sur l'axe CA de l'écliptique ne change pas non plus par l'effet du couple *Ndt*.

Mais il n'en est pas de même de la position de la ligne des nœuds : cette droite, constamment perpendiculaire au plan qui passe par les axes de l'orbite et de l'écliptique, vient de CN en CN_1, décrivant un angle NCN_1, ou $d\psi$ égal à l'angle GHG_1.

Or, $GHG_1 = \frac{GG_1}{HG}$. Donc

$$d\psi = \frac{Ndt}{GH} = \frac{Ndt}{G \sin \gamma}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{N}{G \sin \gamma}.$$

Quant au sens du mouvement, il est direct ou rétrograde, suivant

que l'axe du couple N est dirigé vers le nœud ascendant N ou vers le nœud descendant. Ainsi, pour que l'équation précédente soit générale, il faut regarder N comme positif ou négatif, suivant que son axe tombe sur CN ou sur son prolongement.

Reste le couple Mdt, qui, composé séparément avec G, lui ferait prendre la position CG_2. On voit immédiatement qu'il n'en résulte aucun changement dans la grandeur du couple G ni dans la position de la ligne des nœuds; mais l'inclinaison γ varie, et l'on a :

$$d\gamma = \frac{-GG_2}{CG} = \frac{Mdt}{G}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{M}{G},$$

équation générale, pourvu que l'on regarde M comme négatif ou comme positif, suivant que son axe aura pour direction CM ou le prolongement de cette ligne.

Nous montrerons que le couple M est une fonction périodique du temps, de sorte que l'angle γ oscille simplement entre certaines limites.

On voit en résumé que, des trois couples composants, le premier produit la *variation*, le second la *rétrogradation* de la ligne des nœuds, le troisième enfin l'*oscillation* de l'orbite lunaire, et cela sans qu'aucune de ces actions partielles puisse en rien altérer les deux autres.

V

Expressions analytiques des différents couples dont dépend le mouvement.

Désignons par S, T, L (*fig.* 3) les masses respectives du Soleil, de la Terre et de la Lune; par r et r' les distances du Soleil à la Terre et à la Lune; par δ et δ' les distances de chacun de ces deux corps à leur centre commun de gravité; par ρ la somme de ces distances, c'est-à-dire la distance de la Terre à la Lune.

Commençons par chercher l'expression du couple fini G qui emporte la Terre et la Lune autour de leur centre commun de gravité. Soit ω la vitesse angulaire commune de ces deux corps; les moments des quantités de mouvement qui les animent ont respectivement pour expressions $T\delta^2\omega$ et $L\delta'^2\omega$. Donc

$$G = \omega\,(T\delta^2 + L\delta'^2).$$

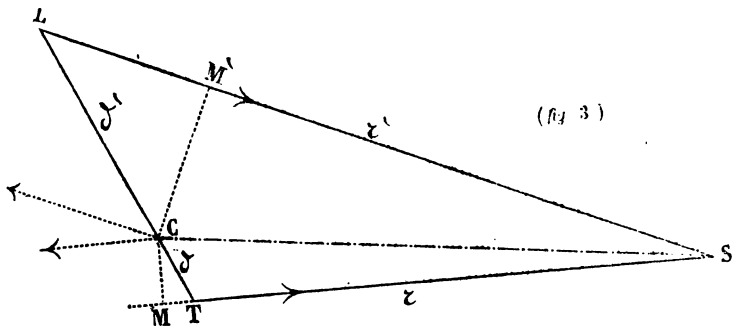
D'ailleurs

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\delta'}{T} = \frac{\delta + \delta'}{L + T} = \frac{\rho}{L + T}.$$

Donc

$$G = \omega\rho^2 \frac{T.L^2 + L.T^2}{(L + T)^2} = \omega\rho^2 \frac{L.T}{L + T}.$$

Cherchons de même l'expression du couple perturbateur et celles de ses couples composants. L'attraction du Soleil sur la Terre est dirigée suivant TS et a pour expression $\frac{S.T}{r^2}$; l'attraction du Soleil



sur la Lune, dirigée suivant LS, est égale à $\frac{S.L}{r'^2}$. Ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité total C, donnent lieu à deux couples de sens contraires, situés tous les deux dans le plan des trois corps, et ayant respectivement pour moments $\frac{S.T}{r^2}$. CM et $-\frac{S.L}{r'^2}$. CM'. Ces deux couples se composent pour former le couple perturbateur, dont la valeur est par conséquent

$$g = \frac{S.T}{r^2}.\,CM - \frac{S.L}{r'^2}.\,CM' = \frac{S.T}{r^2}\,\delta \sin CTS - \frac{S.L}{r'^2}\,\delta' \sin CLS.$$

Or, on a

$$\delta = \frac{\rho L}{L + T} \qquad \delta' = \frac{\rho T}{L + T}.$$

Donc

$$g = \frac{S.T.L}{L + T}\,\rho \left(\frac{\sin CTS}{r^2} - \frac{\sin CLS}{r'^2}\right).$$

D'ailleurs

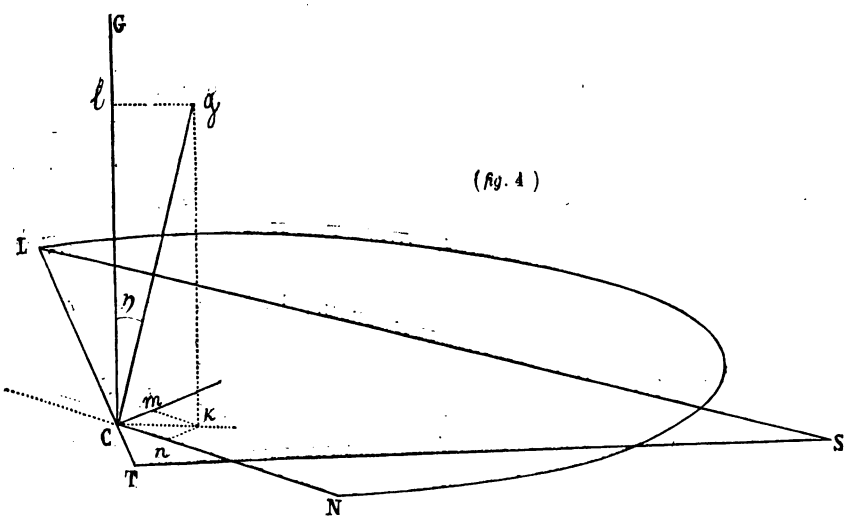
$$\sin \mathrm{CTS} = \sin \mathrm{SCT} \cdot \frac{\mathrm{CS}}{r}, \quad \text{et} \quad \sin \mathrm{CLS} = \sin \mathrm{SCT} \cdot \frac{\mathrm{CS}}{r'}.$$

Donc

$$g = \frac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{T} + \mathrm{L}} \cdot \rho \cdot \mathrm{CS} \cdot \sin \mathrm{SCT} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

Telle est, à chaque instant, l'expression du couple perturbateur; et il est facile d'en déduire celle des trois couples composants L, N, M.

Soit en effet Cg (*fig. 4*) l'axe du couple g perpendiculaire au plan LTS. Abaissons la perpendiculaire gl sur l'axe CG de l'orbite lunaire et la perpendiculaire gk sur le plan de cette orbite, nous décomposerons ainsi le couple g en deux autres, dont le premier Cl sera justement le couple composant L qui agit dans le plan de l'orbite, et dont le second aura pour axe la ligne Ck menée dans ce plan perpendiculairement à TL. Ce dernier, décomposé suivant la direction CN de la ligne des nœuds et la perpendiculaire Cm à cette ligne, donnera les deux couples N et M, dont les axes sont respectivement représentés par Cn et Cm. On a donc, en désignant



(*fig. 4*)

par η l'angle variable que fait le plan de l'orbite avec le plan des trois corps :

$L = Cl = g \cos \eta$,
$N = Cn = Ck \sin Ckn = Ck \sin LCN = g \sin \eta \sin LCN$,
$M = -Cm = -Ck \cos Ckn = Ck \cos LCN = g \sin \eta \cos LCN$.

Si nous substituons à g sa valeur dans ces équations, et si nous posons pour simplifier

$$\frac{S \cdot T \cdot L}{T + L} = h,$$

il vient

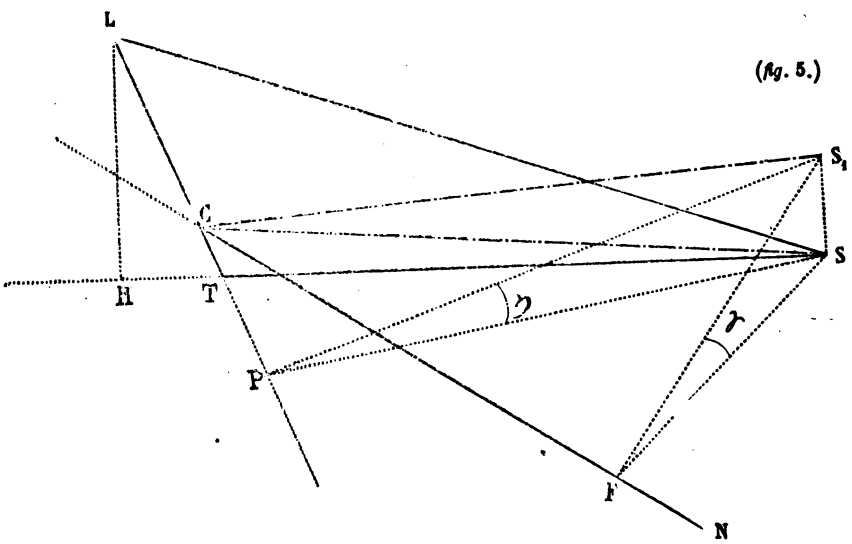
$$L = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \cdot CS \cdot \sin SCT \cos \eta,$$

$$N = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \cdot CS \cdot \sin SCT \sin \eta \sin LCN,$$

$$M = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \cdot CS \cdot \sin SCT \sin \eta \cos LCN.$$

Éliminons l'angle variable η. Pour cela, projetons en SS_1 (*fig.* 5)

(*fig.* 5.)



sur le plan de l'orbite, et abaissons sur LC les perpendiculaires S_1P, SP, et sur CN les perpendiculaires S_1F, SF, nous aurons

$$SS_1 = SP \sin \eta = CS \cdot \sin SCT \sin \eta.$$

D'ailleurs,

$$SS_1 = SF \sin \gamma = SC \sin SCN \sin \gamma,$$

d'où

$$CS \,.\, \sin SCT \sin \eta = CS \,.\, \sin \gamma \sin SCN,$$

équation que nous aurions pu trouver immédiatement par la considération du triangle sphérique SLN.

Nous aurons encore :

$$\cos \eta = \frac{S_1P}{SP} = \frac{CS_1 \,.\, \sin S_1CT}{CS \,.\, \sin SCT},$$

d'où

$$CS \,.\, \sin SCT \cos \eta = CS_1 \,.\, \sin S_1CT.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions des couples composants, ces expressions deviennent

$$(1) \quad \begin{cases} L = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) CS_1 \,.\, \sin S_1CT, \\ N = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) CS \,.\, \sin \gamma \sin SCN \sin LCN, \\ M = h\rho \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) CS \,.\, \sin \gamma \sin SCN \cos LCN. \end{cases}$$

On aurait pu arriver immédiatement à la valeur du couple L, en observant que ce couple est la projection de g sur le plan de l'orbite, et que, d'autre part, CS_1 et S_1CT sont respectivement les projections de CS et de SCT.

CHAPITRE II.

DE LA VARIATION.

I

Nous avons vu tout à l'heure quelle était l'action individuelle de chacun des couples dont nous venons de trouver l'expression algébrique. Le couple L, en particulier, est celui qui produit l'inégalité lunaire connue sous le nom de *variation;* et pour étudier cette inégalité avec quelque détail, nous allons reprendre l'équation

$$\frac{dG}{dt} = L, \tag{2}$$

dans laquelle G exprime le couple fini qui emporte la Terre et la Lune dans leur mouvement mensuel autour de leur centre commun de gravité; nous avons donné plus haut l'expression de ce couple.

Si, dans l'équation précédente, on met pour L sa valeur, il vient:

$$\frac{dG}{dt} = h\rho\,\frac{(r'-r)\,(r'^2+rr'+r^2)}{r^3r'^3}.\,CS_1\,.\,\sin S_1CT.$$

Jusqu'ici, les formules auxquelles nous sommes parvenus sont vraies en toute rigueur; mais si nous voulons aller plus loin, et intégrer l'équation précédente, nous sommes obligés d'introduire certaines simplifications, et de placer les corps dont nous nous occupons dans des conditions idéales qui se prêtent mieux au calcul que les conditions réelles.

Nous avons d'abord, en négligeant les quantités très-petites du second ordre :

$$r'-r = TH = \rho\cos LTH = -\rho\cos LTS,$$

d'où

$$\frac{dG}{dt} = -h\rho^2\,\frac{r'^2+rr'+r^2}{r^3r'^3}\,CS_1\,.\,\sin S_1CT\cos LTS.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons remarquer d'une part que le centre de gravité commun de la Terre et de la Lune est très-voisin du centre de la Terre, et d'autre part que l'orbite lunaire est peu inclinée sur l'écliptique; de sorte que l'on peut, sans grande erreur, considérer l'angle S_1CT comme égal à SCT ou comme supplémentaire de LTS. Nous désignerons par u ce dernier angle, qui pourra, au même degré d'approximation, être regardé comme égal à $v - v'$, v exprimant la longitude de la Lune, et v' celle du Soleil.

Si l'on observe en outre que les longueurs r, r' et CS_1 diffèrent peu les unes des autres, on verra qu'il est permis de regarder le rapport de deux d'entre elles comme égal à l'unité. L'équation précédente deviendra, en ayant égard à ces simplifications :

$$\frac{dG}{dt} = 3\,h\,\frac{\rho^2}{r^3}\,.\,\sin\,(v'-v)\,\cos\,(v'-v)\,.$$

v' et v sont sensiblement proportionnels au temps; nous supposerons qu'ils le soient exactement, ce qui revient à négliger l'excentricité des orbites, comme nous venons de négliger leur inclinaison, à l'exemple de Newton et de Clairaut. On aura, en désignant par m et m' les vitesses moyennes angulaires de la Lune et du Soleil :

$$v = mt, \qquad v' = m't,$$

en comptant les deux longitudes à partir de l'une des syzygies.

Il vient donc

$$dG = 3\,h\,\frac{\rho^2}{r^3}\,.\,\sin\,(m'-m)\,t\,\cos\,(m'-m)\,t\,dt.$$

Si l'on intègre depuis l'époque des quadratures où $(m'-m)\,t = \pm\frac{\pi}{2}$ jusqu'à l'époque t, on trouve, pour l'accroissement du couple dans cet intervalle :

$$\Delta\,G = 3\,h\,\frac{\rho^2}{r^3}\,.\,\frac{\cos^2\,(m'-m)\,t}{2\,(m-m')} = 3\,h\,\frac{\rho^2}{r^3}\,.\,\frac{\cos^2 u}{2\,(m-m')}.$$

Cette équation montre qu'à toute autre époque que celle des

quadratures, l'action du Soleil accroît la valeur du couple des quantités de mouvement, ou, si l'on veut, la valeur de l'aire qui en est l'expression géométrique, et qui serait constante si la Terre et la Lune existaient seules. Mais, pour avoir la *variation* de l'aire réelle autour de sa valeur moyenne, il faut, par une transformation très-simple, changer l'expression précédente de Δ G dans la suivante :

$$\Delta G = \frac{3 S . T . L}{T + L} \frac{\rho^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{4 (m - m')} - \frac{\cos 2 u}{4 (m - m')} \right\}.$$

Cet accroissement se compose de deux parties, l'une que l'on peut regarder comme constante et *augmentant* l'aire d'une égale quantité dans tous les points de l'orbite, l'autre qui dépend de cos 2 u, et qui par conséquent change de signe toutes les fois que u passe par les valeurs $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, etc., c'est-à-dire à tous les octants. La première de ces deux parties n'est pas sensible aux observations; car il n'en résulte pas, à proprement parler, d'*inégalité* dans le mouvement de la Lune, et elle a uniquement pour effet d'augmenter la valeur moyenne de l'*aire observée,* comme cela pourrait résulter par exemple d'une augmentation subite dans la masse de la Terre. La seconde partie constitue à elle seule l'inégalité découverte par Aboul-Wéfa ou Tycho-Brahé, et que les astronomes ont appelée *variation*. L'observation montre, comme notre théorie, qu'elle disparaît aux octants.

II

Il nous est facile de calculer la grandeur de cette inégalité; elle résulte en effet immédiatement de la comparaison entre la partie variable du couple G + Δ G, et sa valeur moyenne. Or, nous avons désigné jusqu'ici par G le couple des quantités de mouvement, tel qu'il serait si la Terre et la Lune existaient seules, et nous avons trouvé pour son expression $\frac{L . T . \rho^2}{L + T} \omega$, où ω exprime la vitesse angulaire moyenne qu'aurait la Lune autour de la Terre dans cette hypothèse. Mais si nous désignons par m la vitesse

angulaire moyenne de la Lune telle que la donne l'observation, c'est-à-dire telle qu'on la déduit du *mouvement troublé,* le produit $\frac{L \cdot T \cdot \rho^2}{L+T} m$ exprimera pareillement la valeur moyenne de G dans le *mouvement troublé,* c'est-à-dire la valeur qu'aurait ce couple dans l'ellipse de Képler, augmentée de la valeur constante de Δ G.

En prenant, d'après ce qui précède, le rapport du terme variable à la fraction $\frac{L \cdot T \cdot \rho^2}{L+T} m$, nous trouvons pour expression de la variation :

$$\delta G = -\frac{3S}{r^3} \quad \frac{\cos 2u}{4m^2\left(1-\frac{m'}{m}\right)}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par τ le temps de la révolution sidérale du Soleil, et par K le rapport de la masse de la Terre à celle de cet astre, on a

$$\frac{S(1+K)}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} = m'^2,$$

et en négligeant K, qui est environ $\frac{1}{355000}$,

$$\frac{S}{r^3} = m'^2,$$

d'où

$$\delta G = -\frac{3m'^2}{m^2} \quad \frac{\cos 2u}{4\left(1-\frac{m'}{m}\right)}.$$

Représentons par n le rapport $\frac{m'}{m}$ du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, nous aurons

$$\delta G = -\frac{3n^2}{4(1-n)} \cos 2u.$$

Tel est le rapport de la variation du couple qui agit dans l'orbite, à sa valeur moyenne, ou si l'on veut le rapport de la variation

de l'aire instantanée à sa valeur moyenne. Cette variation change de signe aux octants, c'est-à-dire chaque semaine. Les écarts maxima ont lieu aux syzygies et aux quadratures, et ont pour expression une fraction de l'aire moyenne marquée par le nombre

$$\frac{3\,n^2}{4\,(1-n)} = \frac{1}{220{,}46},$$

en prenant

$$n^2 = \frac{1}{178{,}7}.$$

C'est le résultat trouvé par Newton, mais par une méthode moins directe; car ce grand géomètre calcule d'abord l'accroissement de vitesse de la Lune, pour en déduire l'accroissement de l'aire instantanée. On pourrait tirer de ce qui précède l'expression analytique de la variation en longitude; mais nous ne nous arrêterons pas à ce calcul, notre but étant uniquement de traiter les questions relatives à la théorie lunaire qui se déduisent immédiatement de la considération des couples.

CHAPITRE III.

DE LA RÉTROGRADATION DES NŒUDS ET DES VARIATIONS D'INCLINAISON DE L'ORBITE.

I.

Examen des deux couples dont l'action produit le déplacement de l'orbite lunaire.

Reprenons dans les équations (1) les expressions des deux couples N et M, dont le premier, comme nous l'avons vu plus haut, détermine à lui seul le mouvement de la ligne des nœuds, tandis que le second produit les oscillations de l'orbite lunaire relativement au plan de l'écliptique :

$$N = h\rho \frac{(r'-r)(r^2+rr'+r'^2)}{r^3 r'^3} \text{CS} \sin\gamma \sin \text{SCN} \sin \text{LCN},$$

$$M = h\rho \frac{(r'-r)(r^2+rr'+r'^2)}{r^3 r'^3} \text{CS} \sin\gamma \sin \text{SCN} \cos \text{LCN}.$$

Introduisons les mêmes simplifications que pour l'étude du couple L. Pour $r'-r$, nous aurons ρ cos LTH ou $-\rho$ cos u. Les facteurs $\frac{r}{r'}$ et $\frac{\text{CS}}{r'}$ seront remplacés par l'unité, et $\frac{\text{S}}{r^3}$ par m'^3. Quant aux angles LCN et SCN, que nous désignerons par φ et φ', ils sont respectivement formés par la ligne qui va du point C au nœud ascendant avec celles qui vont du même point à la Lune et au Soleil. On peut donc, dans les limites d'approximation que nous avons adoptées pour nos calculs, les regarder comme ayant pour sommet commun le centre de la Terre, et comme égaux à leurs projections sur l'écliptique. Si l'on convient de compter constamment ces angles en partant de CN et marchant dans le sens direct, leurs expressions s'obtiendront toujours en retranchant des longitudes du Soleil et de la Lune la longitude ψ du nœud ascendant, ce qui donnera les équations :

$$\varphi = v - \psi, \qquad \varphi' = v' - \psi';$$

on a en outre

$$\varphi - \varphi' = u.$$

Conservons provisoirement les lettres φ et φ', et remplaçons h par sa valeur dans les expressions simplifiées des deux couples; il viendra

$$N = -3\,m'^2\,\frac{\mathrm{T.L}}{\mathrm{T}+\mathrm{L}}\,\rho^2 \sin\gamma \sin\varphi \sin\varphi' \cos u,$$

$$M = -3\,m'^2\,\frac{\mathrm{T.L}}{\mathrm{T}+\mathrm{L}}\,\rho^2 \sin\gamma \cos\varphi \sin\varphi' \cos u.$$

Nous pouvons déjà tirer quelques conséquences assez remarquables de la forme même de ces expressions. Si l'on y remplace u par sa valeur $\varphi - \varphi'$, elles deviennent

$$N = -3\,m'^2\,\frac{\mathrm{T.L}}{\mathrm{T}+\mathrm{L}}\,\rho^2 \sin\gamma \left(\sin^2\varphi \sin^2\varphi' + \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{4}\right),$$

$$M = -3\,m'^2\,\frac{\mathrm{T.L}}{\mathrm{T}+\mathrm{L}}\,\rho^2 \sin\gamma \left(\frac{\sin 2\varphi' \cos^2\varphi + \sin^2\varphi' \cos 2\varphi}{2}\right).$$

En examinant d'abord le dernier terme de la valeur de N, on voit que, dans l'espace d'une demi-lunaison, on peut regarder sin 2 φ' comme sensiblement constant, tandis que sin 2 φ passe par toutes les valeurs positives et négatives que peut avoir un sinus. Les valeurs élémentaires de ce terme sont donc deux à deux égales et de signe contraire, et leurs effets se détruisent dans la période considérée, c'est-à-dire qu'il n'en résulte, pour la ligne des nœuds, qu'une simple oscillation. Les effets moyens proviennent uniquement du premier terme, et comme ce terme est constamment négatif, il est clair que le mouvement moyen de la ligne des nœuds est rétrograde.

II

Il est aisé de voir aussi que la valeur moyenne du couple N est la même que si la matière de la Lune était répandue en forme d'anneau sur le contour de son orbite mensuelle, et que cet an-

neau solide, de même masse que la Lune, éprouverait la même rétrogradation. Le premier terme que nous considérons peut, en effet, s'écrire sans erreur sensible :

$$-3\,m'^2\,\mathrm{L}\,\rho^2\sin\gamma\sin^2\varphi\sin^2\varphi'.$$

Regardons $\sin^2\varphi'$ comme constant pendant une lunaison, et imaginons que la Lune soit partagée en p parties égales $d\mathrm{L}$ distribuées uniformément sur le contour de son orbite, de sorte que les longitudes successives de ces parties soient $d\varphi$, $2d\varphi$, $3d\varphi$ ..... $pd\varphi$. L'action du Soleil sur la première partie $d\mathrm{L}$ donnerait, autour de la ligne des nœuds, un petit couple exprimé par

$$-3\,m'^2.d\mathrm{L}.\rho^2\sin\gamma\sin^2\varphi'\sin^2(d\varphi).$$

L'action sur la seconde donnerait un couple exprimé par

$$-3\,m'^2.d\mathrm{L}.\rho^2\sin\gamma\sin^2\varphi'\sin^2(2\,d\varphi),$$

l'action sur la troisième

$$-3\,m'^2.d\mathrm{L}.\rho^2\sin\gamma\sin^2\varphi'\sin^2(3\,d\varphi),$$

et ainsi de suite. Or, tous ces couples s'ajouteraient si l'on supposait l'anneau solidifié; de sorte que l'on aurait, pour le couple total envoyé par le Soleil à cet anneau :

$$-3\,m'^2\,d\mathrm{L}\,\rho^2.\sin\gamma.\sin^2\varphi'\,[\sin^2(d\varphi)+\sin^2(2\,d\varphi)+\ldots+\sin^2(pd\varphi)],$$

ou, en multipliant et divisant par p :

$$-3\,m'^2.pd\mathrm{L}.\rho^2\sin\gamma\sin^2\varphi'\left[\frac{\sin^2(d\varphi)+\sin^2(2\,d\varphi)+\ldots+\sin^2(pd\varphi)}{p}\right],$$

expression où le facteur $pd\mathrm{L}$ représente la masse de la Lune, et le facteur entre parenthèses la moyenne valeur de $\sin^2\varphi$, depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=pd\varphi$; de sorte que l'on retombe sur la valeur moyenne du couple qu'on avait obtenue en considérant le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Si maintenant nous considérons le couple M, qui produit la variation d'inclinaison de l'orbite, nous voyons que ses deux termes passent l'un et l'autre par des valeurs alternativement positives et négatives, mais égales, au signe près; il ne peut donc en résulter que des effets périodiques. Le premier terme changeant de signe avec sin $2\varphi'$ détermine une oscillation semi-annuelle dans l'orbite lunaire; tandis que l'oscillation qui dépend du second terme ou de cos 2φ a une période semi-mensuelle. Au reste, ces conclusions ne sont qu'indiquées par l'équation différentielle; elles prendront une forme plus nette et plus précise après l'intégration.

III.

Des équations précédentes, il est facile de déduire les expressions différentielles du mouvement de la ligne des nœuds et des variations d'inclinaison de l'orbite; car on a trouvé au chapitre I :

$$d\psi = \frac{N dt}{G \sin \gamma} \quad \text{et} \quad d\gamma = \frac{M dt}{G}.$$

Ces équations deviennent, en y mettant pour N et M leurs valeurs, pour G la fraction $\frac{L.T}{L+T} \cdot \rho^2 m$, et en écrivant, au lieu du rapport $\frac{m'}{m}$, le produit égal $n^2 m$,

$$d\psi = -3 n^2 \sin \varphi \sin \varphi' \cos u . m dt, \tag{3}$$

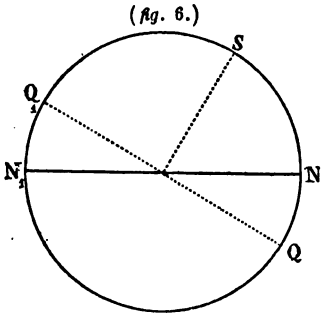
$$d\gamma = -3 n^2 \sin \gamma \cos \varphi \sin \varphi' \cos u . m dt. \tag{4}$$

On peut discuter ces équations comme les précédentes, avant de les intégrer.

Il est clair que le mouvement instantané de la ligne des nœuds sera rétrograde ou direct, suivant que $d\psi$ sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que le produit sin φ sin φ' cos u aura le signe + ou le signe —. Ainsi, le sens de ce mouvement change toutes

les fois qu'une des trois lignes trigonométriques change de signe, et il est facile de voir à quelles conditions géométriques répondent ces alternatives.

(*fig.* 6.)



Soient S le Soleil, Q, Q_1 les quadratures, et NN_1 la ligne des nœuds; si la Lune est du même côté de cette ligne que le Soleil, sin φ et sin φ' sont de même signe : ainsi, pour que $d\psi$ soit positif, il faut et il suffit que cos u soit négatif, c'est-à-dire que l'angle u soit $> 90°$; cela ne peut avoir lieu que si la Lune est en un point de N_1Q_1. Si les deux astres sont de part et d'autre de la ligne des nœuds, le produit sin φ sin φ' est négatif, et, pour que $d\psi$ ait le signe $+$, il faut que cos u soit pareillement négatif, c'est-à-dire que la Lune soit sur l'arc NQ. Il suit de là que le mouvement instantané de la ligne des nœuds est direct toutes les fois que la Lune est comprise entre l'un des nœuds et la quadrature voisine, et rétrograde dans tous les autres cas.

On voit donc que la ligne des nœuds ne rétrograde pas d'une manière continue, mais au contraire que, dans l'espace d'un mois, elle prend à deux reprises un mouvement direct. Les changements de sens ont lieu aux moments où la Lune passe à l'un des nœuds de son orbite ou à l'une des quadratures; à ces quatre époques du mois, la ligne reste immobile. Comme d'ailleurs les arcs parcourus par la Lune sur son orbite, pendant que ses nœuds ont un mouvement direct, sont toujours moindres qu'un quart de circonférence, tandis que les arcs qu'elle parcourt, pendant que les nœuds rétrogradent, varient entre $\frac{\pi}{2}$ et π, il est clair que la rétrogradation correspond à la plus grande partie du mois lunaire, et que le déplacement définitif s'effectue contre l'ordre des signes.

Une autre remarque importante au sujet de l'équation (2), c'est qu'elle ne contient plus ni les masses d'aucun des corps qui nous occupent, ni l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique. Les diverses quantités qui y entrent dépendent uniquement des moyens mouvements de la Terre autour du Soleil, ou de la Lune autour de la Terre. La rétrogradation des nœuds serait donc la même dans tou

autre système de trois corps, pourvu que les moyens mouvements ne fussent pas changés.

En examinant de même l'équation (4), et discutant les signes que prend le second membre suivant les positions respectives du Soleil, de la Lune et des nœuds, on verra que les variations de l'angle γ s'effectuent, comme celles de l'angle ψ, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; mais les arcs parcourus par la Lune sur son orbite, pendant la diminution de cet angle γ, sont tantôt plus petits, tantôt plus grands que les arcs parcourus pendant son accroissement, de sorte que la valeur moyenne de cet angle reste constante. C'est le résultat que nous a déjà donné l'examen du couple M.

IV

Intégration des équations qui précèdent.

Pour intégrer ces équations, commençons par transformer en une somme les produits des lignes trigonométriques qu'elles renferment. Ces produits sont, pour la première, $\sin\varphi \sin\varphi' \cos u$; pour la seconde, $\cos\varphi \sin\varphi' \cos u$, et l'on sait que $\varphi - \varphi' = u$.

On a :

$$\sin\varphi' \cos u = \frac{\sin(\varphi' + u) + \sin(\varphi' - u)}{2} = \frac{\sin\varphi + \sin(\varphi' - u)}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin\varphi' \cos u \sin\varphi &= \frac{1}{2}\left[\sin^2\varphi + \sin\varphi \sin(\varphi' - u)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[1 - \cos 2\varphi + \cos(\varphi - \varphi' + u) - \cos(\varphi + \varphi' - u)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2\varphi + \cos 2u - \cos 2\varphi'\right).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sin\varphi' \cos u \cos\varphi &= \frac{1}{2}\left[\sin\varphi \cos\varphi + \sin(\varphi' - u)\cos\varphi\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\sin 2\varphi + \sin(\varphi + \varphi' - u) + \sin(\varphi' - u - \varphi)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' - \sin 2u\right).\end{aligned}$$

Il vient, en substituant ces valeurs dans les équations (3) et (4),

$$d\psi = -\frac{3}{4}n^2\left(1 + \cos 2u - \cos 2\varphi - \cos 2\varphi'\right)mdt,$$

$$d\gamma = -\frac{3}{4}n^2 \sin\gamma\left(-\sin 2u + \sin 2\varphi + \sin 2\varphi'\right)mdt.$$

Remplaçons, dans les seconds membres, φ par sa valeur $v - \psi$, φ' par $v' - \psi$, et u par $v - v'$, il viendra :

$$(5)\quad d\psi = -\frac{3}{4}n^2\left[1 + \cos 2(v-v') - \cos 2(v-\psi) - \cos 2(v'-\psi)\right]mdt,$$

$$(6)\quad d\gamma = -\frac{3}{4}n^2\sin\gamma\left[-\sin 2(v-v') + \sin 2(v-\psi) + \sin 2(v'-\psi)\right]mdt.$$

Ces équations ne peuvent s'intégrer exactement, parce que les arcs dont les sinus et cosinus entrent dans le second membre, dépendent de la variable ψ; mais il est facile d'en avoir des intégrales très-approchées, parce que cet angle ψ, qui exprime la longitude du nœud ascendant, varie très-lentement par rapport aux autres angles.

Il en résulte d'abord que l'on peut obtenir à très-peu près la valeur moyenne de la rétrogradation du nœud, en se bornant au premier terme de la valeur de $d\psi$; car les effets provenant des trois derniers seraient absolument périodiques si ψ était constant, et sont, par conséquent, bien près de l'être en réalité.

On a donc sensiblement :

$$\psi = -\frac{3}{4}n^2mt,$$

en faisant commencer l'intégrale à l'origine du temps.

Cette équation donne, pour le mouvement angulaire du nœud pendant l'unité de temps :

$$\overline{\psi} = -\frac{3}{4}n^2m.$$

En substituant à n et m leurs valeurs numériques, on trouve pour $\overline{\psi}$ un nombre un peu supérieur à celui que donne l'observa-

tion; mais ce nombre se rectifiera tout à l'heure par une méthode analogue à celle des approximations successives.

Puisque la valeur moyenne de l'angle ψ est proportionnelle au temps, nous pouvons remplacer cet angle par it dans les équations à intégrer, en faisant

$$-\frac{3}{4}n^2m = i.$$

Substituons aussi, en nous conformant aux simplifications que nous avons déjà introduites, les valeurs mt, $m't$ aux longitudes v et v'; il viendra :

$$d\psi = -\frac{3}{4}n^2m\Big[1 + \cos 2(m-m')t - \cos 2(m-i)t - \cos 2(m'-i)t\Big]dt,$$

$$d\gamma = -\frac{3}{4}n^2m\sin\gamma\Big[-\sin 2(m-m')t + \sin 2(m-i)t + \sin 2(m'-i)t\Big]dt.$$

La première de ces équations s'intègre immédiatement, et donne :

$$(7)\qquad \psi = -\frac{3}{4}n^2mt - \frac{3n^2m}{8(m-m')}\sin 2(m-m')t + \frac{3n^2m}{8(m-i)}\sin 2(m-i)t + \frac{3n^2m}{8(m'-i)}\sin 2(m'-i)t.$$

On trouve de même, en divisant les deux membres de la seconde équation par $\sin\gamma$, et intégrant :

$$l\tang\frac{1}{2}\gamma = -\frac{3n^2m}{8(m-m')}\cos 2(m-m')t + \frac{3n^2m}{8(m-i)}\cos 2(m-i)t + \frac{3n^2m}{8(m'-i)}\cos 2(m'-i)t + C.$$

Il est clair que les trois premiers termes du second membre

donnent une somme algébrique tantôt positive et tantôt négative. Soit γ' la valeur de l'angle γ, au moment où cette somme passe par 0; alors, $C = l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma'$, et il vient :

$$l\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'} = -\frac{3n^2m}{8(m-m')}\cos 2(m-m')t + \frac{3n^2m}{8(m-i)}\cos 2(m-i)t + \frac{3n^2m}{8(m'-i)}\cos 2(m'-i)t.$$

Pour rendre cette équation plus commode à discuter, remarquons que, le second membre ayant toujours une petite valeur numérique, le rapport $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'}$ diffère toujours très-peu de l'unité; de sorte qu'en posant

$$l\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'} = x,$$

on en tire sensiblement :

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'} = e^x = 1 + x,$$

et ensuite :

$$x = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}{\frac{1}{2}\sin\gamma'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\sin\gamma'},$$

d'où enfin

$$\gamma - \gamma' = -\frac{3\,n^2 m \sin\gamma'}{8\,(m-m')}\cos 2\,(m-m')\,t + \frac{3\,n^2 m \sin\gamma'}{8\,(m-i)}\cos 2\,(m-i)\,t + \frac{3\,n^2 m \sin\gamma'}{8\,(m'-i)}\cos 2\,(m'-i)\,t.$$

On aurait pu parvenir plus simplement à cette équation, en remarquant, dans l'équation différentielle, que sin γ peut être remplacé, sans erreur sensible, par sa valeur moyenne, et intégrant immédiatement.

V

Discussion des équations finies qui déterminent le déplacement de l'orbite lunaire.

Si l'on examine le second membre de l'équation (7), d'où dépend le mouvement de la ligne des nœuds, on voit que le premier terme croît proportionnellement au temps, mais en restant toujours négatif, et que les trois autres ont des valeurs périodiques. On en conclut que cette ligne est douée d'un mouvement moyen rétrograde, assujetti à trois inégalités principales. On voit de même immédiatement, à l'inspection de l'équation (8), que la variation d'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique dépend uniquement de trois inégalités correspondant respectivement aux trois précédentes et de même période.

Les inégalités qui ont pour argument $2\,(m-m')\,t$, ou $2v-2v'$, ont pour période une demi-lunaison. Celles dont l'argument est $2\,(m-i)\,t$ ou $2\,v-2\,\psi$ ont une période un peu plus courte, et marquée par une demi-révolution de la Lune par rapport au nœud. Enfin, les inégalités qui dépendent de l'angle $2\,(m'-i)\,t$ ou $2\,v'-2\,\psi$ ont une période à peu près semestrielle. Ce sont les plus importantes à cause de la grandeur de leurs coefficients.

Avant de discuter ces inégalités, commençons par déduire de l'équation (7) une valeur de la rétrogradation moyenne plus exacte que celle que nous avons donnée tout à l'heure. Nous emploierons pour cela la méthode des approximations successives, c'est à dire

que, dans le second membre de l'équation différentielle (5), d'où nous avons tiré ψ, nous remplacerons cette quantité par sa valeur déduite de l'équation (7), et nous chercherons le terme non périodique qui peut résulter d'une nouvelle intégration. Il n'est pas nécessaire, dans ce calcul, de tenir compte des deux premières inégalités, à cause de la petitesse de leurs coefficients. D'après cette remarque, on trouve, en remplaçant ψ dans l'équation (5), non plus par it, mais par

$$it + \frac{3\,n'^2 m}{8\,(m'-i)} \sin 2\,(m'-i)\,t,$$

$$d\psi = -\frac{3}{4} n'^2 m dt \left\{1 - \cos\left[2\,(m'-i)\,t - \frac{3\,n'^2 m}{4\,(m'-i)} \sin 2\,(m'-i)\,t\right]\right\}.$$

Faisons

$$\frac{3\,n'^2 m}{4\,(m'-i)} = \mathrm{K},$$

et remarquons que $\mathrm{K} < \frac{1}{17}$. Alors

$$\cos\,[2\,(m'-i)\,t - \mathrm{K}\sin 2(m'-i)\,t] = \begin{cases} \cos 2\,(m'-i)\,t\,\cos[\mathrm{K}\sin 2(m'-i)t] \\ +\sin 2\,(m'-i)\,t\,\sin\,[\mathrm{K}\sin 2\,(m'-i)t] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos 2\,(m'-i)\,t\left[1 - \frac{\mathrm{K}^2}{2}\sin^2 2\,(m'-i)\,t + \ldots.\right] \\ +\sin 2(m'-i)\,t\,[\mathrm{K}\sin 2(m'-i)t + \ldots.]. \end{cases}$$

Si l'on néglige les termes périodiques et ceux qui renferment les puissances supérieures de K, il reste le terme

$$\mathrm{K}\sin^2 2\,(m'-i)\,t = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{K}\cos 4\,(m'-i)\,t}{2},$$

dont la partie non périodique est $\frac{\mathrm{K}}{2}$ ou $\frac{3\,n'^2 m}{8\,(m'-i)}$.

On a donc, en se bornant aux mouvements moyens :

$$d\psi = -\frac{3}{4} n'^2 m dt\left[1 - \frac{3\,n'^2 m}{8\,(m'-i)}\right];$$

d'où

$$\psi = -\frac{3}{4} n^2 m \left[1 - \frac{3 n^2 m}{8 (m' - i)} \right] t,$$

expression vraie aux quantités près de l'ordre n^4, comme on peut le voir en la comparant à celle qui est donnée au n° 13 du livre VII de la *Mécanique céleste*.

Pour calculer la valeur numérique de ψ, remplaçons i par sa valeur $-\frac{3}{4} n^2 m$, il viendra :

$$\psi = -\frac{3}{4} n^2 m \left[1 - \frac{3 n^2 m}{8 m' + 6 n^2 m} \right] t = -\frac{3}{4} n^2 m \left(\frac{3 n + 8}{6 n + 8} \right) t.$$

Or,

$$n = \frac{m'}{m} = \frac{27,32}{365,25} = 0,074805.$$

Donc

$$\psi = -0,0040855\, mt.$$

Si l'on prend le jour solaire moyen pour unité de temps, on a $m = \frac{2\pi}{27,32}$, et l'on trouve, pour la rétrogradation diurne de la ligne des nœuds, en partie du rayon,

$$\psi = 0,0009396,$$

et par conséquent en degrés, minutes, etc.

$$\psi = 3' 13'',78.$$

Cette quantité ne diffère de celle que donne l'observation que de 3″ environ, c'est-à-dire de la soixantième partie de sa valeur. Cette différence tient surtout à ce que nous avons négligé la variation du rayon vecteur.

VI

Discussion des inégalités.

Nous avons déjà remarqué l'analogie qui existe entre les trois inégalités du mouvement des nœuds, et celles de l'inclinaison de l'orbite. Ces inégalités, considérées deux à deux, sont proportionnelles, l'une au sinus, l'autre au cosinus d'un même arc, et ont, à un facteur constant près, le même coefficient.

Commençons, pour avoir les valeurs numériques de ces divers coefficients, par calculer celles des trois fractions

$$\frac{3\,n^2 m}{8\,(m-m')}, \qquad \frac{3\,n^2 m}{8\,(m-i)}, \qquad \frac{3\,n^2 m}{8\,(m'-i)},$$

qui deviennent respectivement, après y avoir remplacé i par $-\frac{3}{4}\,n^2 m$, et opéré quelques réductions,

$$\frac{3\,n^2}{8\,(1-n)}, \qquad \frac{3\,n^2}{8+6\,n^2}, \qquad \frac{3\,n}{8+6\,n};$$

nous trouverons, en partie du rayon, les nombres

0,002268, 0,002090, 0,027746,

et en degrés, minutes, etc.,

7′48″, 7′16″, 1°31′19″.

Ce sont là justement les coefficients des inégalités du mouvement des nœuds, et il suffira de les multiplier par sin γ' pour en déduire ceux qui se rapportent à l'inclinaison de l'orbite.

On a sin $\gamma' =$ sin . 5°8′48″, d'où log . sin $\gamma' = 8{,}95286$, ce qui donne les trois coefficients

42″, 39″, 8′12″.

On déduit de là :

$$\psi = -\frac{3}{4}n'mt - 7'48'' \sin 2(m-m')t + 7'16'' \sin 2(m-i)t + 1°31'19'' \sin 2(m'-i)t,$$

$$\gamma - \gamma' = -42'' \cos 2(m-m')t + 39'' \cos 2(m-i)t + 8'12'' \cos 2(m'-i)t.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, la dernière inégalité est de beaucoup la plus considérable dans chacune de ces équations; elle a pour argument, dans l'une et dans l'autre, $2(m'-i)t$, c'est-à-dire qu'elle se développe dans l'intervalle de temps que met le Soleil pour aller de l'un à l'autre nœud. Si nous voulons nous faire une idée géométrique du phénomène, concevons une ligne moyenne des nœuds douée d'un mouvement rétrograde uniforme; faisons osciller une autre ligne à droite et à gauche de celle-ci, jusqu'à une distance d'un degré et demi environ, et dans une période d'à peu près six mois; la vraie ligne des nœuds sera toujours très-rapprochée de cette dernière, et l'écart de ces deux droites sera réglé par les deux premières inégalités. De même, l'orbite réelle sera toujours très-peu inclinée sur une orbite idéale assujettie à des oscillations semestrielles d'à peu près 8′ autour de sa position moyenne.

Ces conclusions théoriques sont conformes aux faits observés, et l'accord se manifeste aussi dans les résultats numériques relatifs à ces inégalités. Cherchons en effet quel est le plus grand écart résultant de la valeur de ψ, entre le nœud vrai et le nœud moyen. Il est clair que pour trouver le maximum de la somme algébrique des trois derniers termes, on peut commencer par rendre maximum le troisième, qui est beaucoup plus considérable que les autres. Pour cela, il faut faire $\sin 2(m'-i)t = 1$, c'est-à-dire supposer le Soleil à 45° de l'un des nœuds. Quant aux deux autres termes, on voit que leur somme atteindra à très-peu près sa plus grande valeur, si l'on fait $2(m-i)t = \frac{\pi}{4}$, d'où $2(m-m')t = -\frac{\pi}{4}$. Les sinus de ces arcs sont respectivement $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. De là ré-

sulte pour la valeur de l'écart maximum,

$$7'48''.\frac{1}{\sqrt{2}} + 7'16''.\frac{1}{\sqrt{2}} + 1°31'19'' = 1°42'.$$

La légère différence qui existe entre cet écart calculé et l'écart observé tient aux simplifications que nous avons faites pour arriver à l'intégration.

Calculons de même l'amplitude de l'oscillation de l'orbite. Si nous considérons d'abord une des nouvelles ou des pleines lunes qui arrivent à 90° des nœuds, nous aurons

$$\cos 2(m-m')t = 1,\ \cos 2(m-i)t = -1,\ \cos 2(m'-i)t = -1,$$

d'où

$$\gamma - \gamma' = -42'' - 39'' - 8'12'' = -9'33''.$$

Au contraire, dans les quadratures où le Soleil coïncide avec l'un des nœuds, on aura

$$\cos 2(m-m')t = -1,\ \cos 2(m-i)t = -1,\ \cos 2(m'-i)t = 1,$$

d'où

$$\gamma - \gamma' = 42'' - 39'' + 8'12'' = 8'15''.$$

La différence entre ces valeurs extrêmes, c'est-à-dire l'amplitude de l'oscillation, est de 17'48", nombre peu différent des 17'35" que donne l'observation.

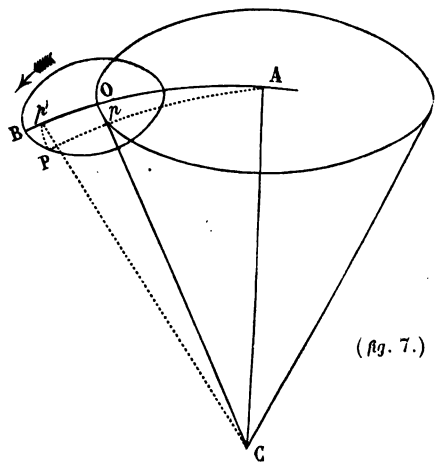
VII.

La relation remarquable qui existe entre les coefficients des inégalités dont sont affectés les angles ψ et γ conduit à une représentation géométrique très-simple du mouvement général de l'orbite.

Considérons à cet effet l'axe CA de l'écliptique et l'axe moyen CO de l'orbe lunaire; si l'on n'a égard d'abord, pour chacun des angles, qu'à une seule des trois perturbations, par exemple celle dont la période est semi-annuelle, on poura écrire :

$$\delta\psi = K \sin 2(m'-i)t \quad \text{et} \quad \delta\gamma = K \sin\gamma' \cos 2(m'-i)t.$$

Pour trouver la position du pôle vrai par rapport à la position O du pôle moyen (*fig.* 7), il faut d'abord prendre sur la circonférence de rayon AO, en marchant dans le sens direct, si $\delta\psi$ est positif, un arc Op qui sous-tende l'angle $OAp = \delta\psi$, puis, sur le prolongement de AO, un arc $Op' = \delta\gamma$, et enfin composer ces deux petits arcs par la règle du parallélogramme; on obtient ainsi le point P.



(*fig.* 7.)

Or,

$$Op = OA \,.\, \delta\psi = OC \sin\gamma' \,\delta\psi = K \,.\, OC \sin\gamma' \sin 2\,(m' - i)\,t,$$

et

$$Op' = OC \,.\, \delta\gamma = K \,.\, OC \sin\gamma' \cos 2\,(m' - i)\,t;$$

d'où

$$OP = \sqrt{\overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2} = K \,.\, OC \sin\gamma' = \text{const.}$$

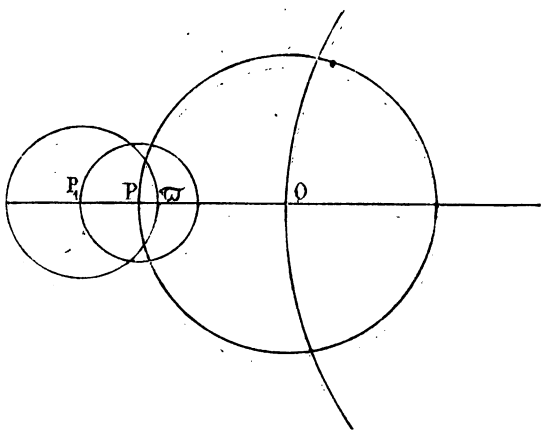
Le pôle vrai décrit donc, en vertu de la perturbation semi-annuelle, un cercle autour du pôle moyen. La durée de chaque révolution est égale au temps que met le Soleil pour aller d'un nœud à l'autre. Si l'on veut connaître le sens de ce mouvement, il faut remarquer que, lorsque l'argument $2\,(m' - i)\,t$ est égal à zéro, le pôle vrai est en B à son extrême distance du point A. A partir de ce moment, l'angle γ commence à décroître, tandis que $\delta\psi$ prend le signe +; d'où il résulte évidemment que le pôle marche vers le

point P, c'est-à-dire dans le sens direct, ou bien encore en sens contraire de la marche du pôle moyen O.

On pourrait représenter de la même manière chacune des deux autres inégalités considérée isolément. Si l'on veut avoir ensuite une image géométrique de l'ensemble, c'est-à-dire connaître le déplacement réel du pôle de l'orbite, il suffit de composer les mouvements circulaires partiels qui résulteraient des diverses perturbations, et l'on arrive à la proposition suivante :

Le pôle moyen O (*fig.* 8) parcourt, dans le sens rétrograde, en

(*fig.* 8.)

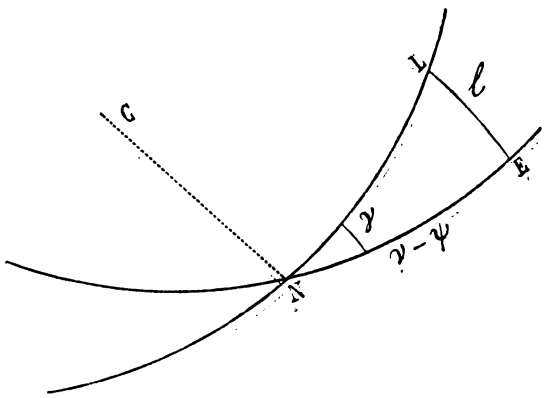


18 ans $\frac{2}{3}$ environ, un cercle ayant pour axe l'axe OA de l'écliptique, et un arc de 5°9′ pour rayon sphérique. Considérons ce point O comme le centre mobile d'un cercle, de 8′12″ de rayon, parcouru dans le sens direct, et dans un espace de 6 mois par un certain point P. Autour de ce dernier, faisons tourner dans le même sens un second point idéal P_1, à une distance de 39″, et dans le temps que met la Lune à aller du nœud ascendant au nœud descendant. Ce point sera le centre du mouvement du pôle vrai ϖ. Ce mouvement s'effectuera, toujours en sens direct, sur une circonférence de 42″ de rayon, et sa durée sera d'une demi-lunaison. Il est facile de voir en outre qu'au moment où le Soleil et la Lune sont en conjonction ou en opposition sur la ligne des nœuds, les quatre points O, P, P_1 et ϖ sont sur un même grand cercle passant par le pôle A de l'écliptique; car les trois inégalités qui entrent dans

l'expression de ψ s'évanouissent à la fois. On peut, d'après cela, trouver à un instant quelconque la situation du pôle vrai de l'orbite lunaire.

Newton a remarqué que les deux inégalités à courte période ne produisaient aucune inégalité sensible dans la latitude de la Lune, de sorte qu'on ne pouvait les trouver que par la théorie. On a en effet (*fig.* 9), en représentant par NL, un arc de l'orbite lunaire; par NE, un arc de l'écliptique; et par LE $= l$, la latitude de la Lune,

(*fig.* 9.)



$$\text{tang } l = \text{tang } \gamma \sin (v - \psi),$$

ou

$$l = \gamma \sin (v - \psi);$$

d'où

$$\delta l = \sin (v - \psi)\, \delta\gamma - \gamma \cos (v - \psi)\, \delta\psi.$$

Substituant pour $\delta\gamma$ et $\delta\psi$ leurs termes périodiques et réduisant, on trouve

$$\delta l = -\frac{3n^2m}{8(m-i)}\gamma \sin (m-i)t + \frac{3n^2m}{8}\left(\frac{1}{m'-i} + \frac{1}{m-m'}\right)\sin (m-2m'+i)t.$$

Le premier de ces deux termes, qui provient de l'inégalité d'argument $v - \psi$, rentre dans le premier terme du développement de la latitude. Quant aux deux autres inégalités de l'orbite, on voit qu'il n'en résulte qu'une seule et même équation de latitude dont l'argument est $(m - 2m' + i)t$. La plus grande partie du coeffi-

cient de cette équation provient de l'inégalité semestrielle, tandis que celle dont la période est une demi-lunaison ne fait qu'augmenter ce coefficient d'une quantité de l'ordre n^2. On voit donc que les deux petites inégalités de l'orbite ne pourraient se déduire de l'observation seule.

CHAPITRE IV.

MESURE DE L'APLATISSEMENT DE LA TERRE DÉDUITE D'UNE DES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

I.

Réaction de la nutation terrestre sur le mouvement de l'orbite lunaire.

En étudiant, dans les pages précédentes, l'action perturbatrice du Soleil, nous avons supposé que le couple fini qui animait le système formé par la Terre et la Lune se réduisait au couple unique qui emporte ces deux corps autour de leur centre commun de gravité. Nous avons donc fait abstraction momentanément des couples qui proviennent de la rotation de la Terre et de la Lune autour de leur axe; mais nous avons eu soin de remarquer que, pour qu'une telle simplification n'altérât en rien la rigueur de nos raisonnements, il faudrait que l'axe de la Terre conservât dans l'espace une direction invariable. Or, cette immobilité n'est qu'approchée, et l'on sait que l'axe terrestre se déplace à chaque instant, en donnant lieu aux phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation. On conçoit qu'un tel déplacement, si lent qu'il puisse être, doit nécessairement réagir sur le mouvement de l'orbite lunaire, et nous allons voir en effet que cette réaction existe, et produit dans la marche de notre satellite une inégalité sensible en latitude. Cette inégalité est remarquable surtout en ce qu'elle provient, comme la nutation, de l'attraction qui s'exerce entre la Lune et le ménisque terrestre, ce qui permet d'en déduire une valeur très-exacte de l'aplatissement du globe. Telle est la raison de l'importance que lui attribue l'auteur de la *Mécanique céleste,* qui l'a découverte en partant des formules relatives à l'attraction des sphéroïdes. On voit que la théorie des couples nous y conduit par une marche naturelle, et, pour ainsi dire, *nécessaire,* et l'on pourra reconnaître en outre la simplicité des calculs et la clarté des considérations géométriques qui dérivent de cette théorie.

Le couple résultant qui provient des forces dont sont animées les

diverses molécules du système formé par la Terre et la Lune s'obtient, ainsi que nous l'avons vu plus haut, par la composition de trois autres couples :

1° Le couple que nous avons désigné par G, et qui existerait seul si les deux astres étaient réduits à leurs centres respectifs de gravité; 2° le couple qui anime la Terre dans son mouvement diurne de rotation; 3° le couple qui anime la Lune.

Nous avons remarqué que ce dernier pouvait être négligé en toute rigueur, non-seulement parce qu'il est très-petit, mais parce que son axe se trouve, par suite du phénomène de la libration, constamment situé dans le plan qui passe par les axes de l'écliptique et de l'orbite lunaire. Il suit en effet de cette circonstance que ce plan contient aussi toujours l'axe du couple résultant des deux couples qui agissent dans l'orbite et dans l'équateur lunaires. Cet axe et celui de l'orbite occupent une position relative invariable, et tournent simultanément autour de l'axe de l'écliptique, en décrivant deux cônes concentriques. On peut donc étudier indifféremment l'un ou l'autre de ces mouvements, c'est-à-dire faire abstraction du couple engendré par la rotation de la Lune.

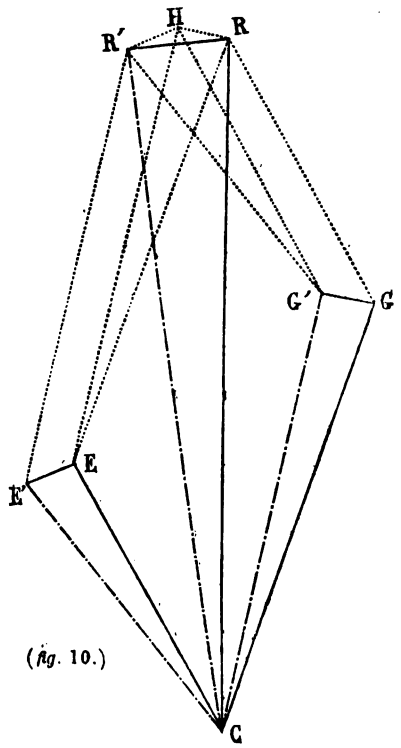
Dès lors, nous n'avons plus à considérer que le couple G ou CG situé dans l'orbite lunaire (*fig.* 10), et le couple CE dont l'axe est celui de l'équateur terrestre. Soit CR leur couple résultant, qui serait invariable de grandeur et de position dans l'espace, s'il n'intervenait pas d'action perturbatrice.

Laissons de côté, pour le moment, le mouvement de précession dont la période est extrêmement longue, et considérons simplement la nutation, qui consiste, comme on sait, en un petit mouvement conique de CE autour de sa position moyenne.

Nous avons vu que, si CE était immobile dans l'espace, CG pourrait être considéré, tout aussi bien que CR, comme l'axe d'un couple qui resterait invariable de position et de grandeur dans un système uniquement composé de la Terre et de la Lune, ce qui nous a permis d'étudier l'action du couple perturbateur, en le composant directement avec CG. Mais il est clair que, si CE se déplace, ces conclusions sont infirmées et que la réaction de ce déplacement s'ajoute à l'action du couple envoyé par le Soleil pour déterminer le mouvement de CG.

On peut voir en outre que ces deux actions sont indépendan-

tes l'une de l'autre. En effet, de quelque manière que se meuvent les trois axes CR, CE et CG, ce triple mouvement doit s'opé-



(fig. 10.)

rer de façon que le premier reste constamment la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres. Cela posé, soit RR' le déplacement élémentaire qu'éprouve le point R par l'effet du couple perturbateur, et EE' celui qu'éprouve le point E, dans le même temps, par l'effet de la nutation, nous aurons évidemment le déplacement du point G, en menant R'G' égale et parallèle à E'C, et joignant GG'. Or, pour évaluer cette quantité GG', il suffit de mener G'H égale et parallèle à GR, et de joindre ensuite HR et HR'. RR' est la résultante de ces deux lignes, et par conséquent de leurs égales GG' et EE'. En d'autres termes, le déplacement élémentaire GG' du point G s'obtient en composant avec la ligne RR' qui est égale et parallèle à l'axe du couple perturbateur, une ligne égale et contraire à EE', c'est-à-dire au déplacement qu'éprouve le point E par l'effet de la nutation. La loi de la

superposition des petits mouvements montre que ces deux déplacements, composants du point G, peuvent être introduits séparément et indépendamment l'un de l'autre.

II.

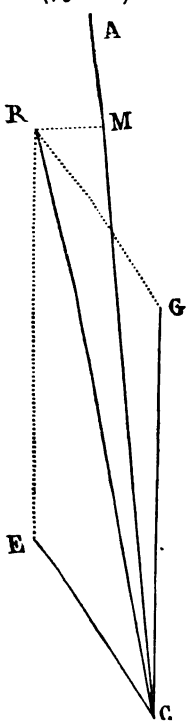
Nous avons, dans les chapitres précédents, résolu la première partie du problème, c'est-à-dire déterminé le changement que l'action du couple perturbateur introduit dans la position du point G. Il nous reste donc actuellement, pour avoir la véritable marche de ce point, à le déplacer à chaque instant d'une quantité égale et contraire à celle dont se déplace le point E. Nous venons de remarquer que ces deux opérations partielles sont indépendantes l'une de l'autre; la somme des effets de la première donnée par l'intégration détermine le mouvement général de l'axe de l'orbite tel que nous l'avons obtenu déjà; les effets de la seconde se traduisent par une simple perturbation de ce mouvement.

Cette perturbation a évidemment pour période, comme la nutation dont elle provient, la durée d'une révolution de la ligne des nœuds. Il n'est pas difficile de trouver son amplitude, c'est-à-dire la quantité dont elle fait varier l'angle compris entre les axes de l'orbite et de l'écliptique. Il suffit pour cela de déterminer la relation qui existe entre la nutation de l'axe terrestre et celle de l'orbite lunaire. Or, si l'on remarque que ces deux phénomènes proviennent uniquement de réactions intérieures du système formé par la Terre et la Lune, on voit qu'il n'en résulte aucun changement dans la position ou la grandeur de l'axe résultant CR, et par conséquent de sa projection CM sur l'axe CA de l'écliptique; d'un autre côté, cette projection CM n'est altérée ni par l'action du couple perturbateur, ni par la précession des équinoxes, puisque ces deux causes déterminent simplement des mouvements coniques de CG ou de CE autour de l'axe de l'écliptique, et ne changent par conséquent en rien les valeurs de leurs projections sur cet axe.

Si donc nous désignons par θ l'angle ECA de l'équateur et de l'écliptique (*fig.* 11), nous avons, en exprimant que la somme des

projections de CE et de CG sur CA reste constante,

(*fig.* 11.)



$$CE\cos\theta + CG\cos\gamma = \text{const.},$$

d'où

$$CE.\sin\theta\delta\theta = -CG.\sin\gamma\delta\gamma.$$

On a trouvé d'ailleurs (§ V, ch. I^er^),

$$CG = m\rho^2.\frac{T.L}{T+L},$$

m désignant la vitesse moyenne angulaire de la Lune, et l'on a évidemment, en désignant par μ la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe, et par C son moment d'inertie par rapport au même axe,

$$CE = \mu C,$$

d'où

$$\mu C\sin\theta\,\delta\theta = -\frac{T.L}{T+L}m\rho^2\sin\gamma\,\delta\gamma.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre les nutations de l'équateur terrestre et de l'orbe lunaire; elle est, aux notations près, identique à celle que donne Laplace à la page 323 du V^e^ volume de la *Mécanique céleste*.

III.

De la relation qui précède, on peut tirer quelques conséquences géométriques assez importantes. On voit, en effet, d'abord que les variations $\delta\gamma$ et $\delta\theta$ sont des signes contraires; d'où il résulte que, lorsque l'axe de l'équateur terrestre se rapproche de celui de l'écliptique, l'axe de l'orbite s'en éloigne, et réciproquement. La valeur maximum de l'une des inclinaisons correspond donc à la valeur minimum de l'autre. On voit en outre que si C était connu,

on pourrait déduire immédiatement de l'équation précédente l'amplitude de la nutation de l'orbe lunaire. Or, pour pouvoir déterminer C par le calcul, il faudrait connaître la loi de la variation de densité des couches intérieures de la Terre. Mais, si nous ne cherchons qu'une approximation un peu grossière, nous pouvons supposer la Terre homogène et sphérique. Nous aurons alors, en désignant son rayon par a,

$$C = \frac{2}{5} T a^2,$$

d'où

$$\delta\gamma = -\frac{2}{5} \frac{T+L}{L} \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\mu}{m} \frac{\sin\theta}{\sin\gamma} \delta\theta.$$

Pour avoir, en valeur absolue, le maximum $\Delta\gamma$ du premier membre de l'équation, il faut substituer à $\delta\theta$ sa plus grande valeur, qui est de $8'',5$, en ne tenant compte que de la nutation *due à l'action de la Lune*. Nous adopterons en outre $\frac{1}{88}$ pour la masse de notre satellite, et nous remarquerons que $\frac{\mu}{m}$ exprimant le rapport des vitesses angulaires de la Terre autour de son axe, et de la Lune dans son orbite, est égal au quotient du mois sidéral lunaire par le jour sidéral, c'est-à-dire au nombre 27,40.

Cela posé, nous aurons

$$\text{Log } \frac{2}{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overline{1},6021$$

$$\text{Log } \frac{T+L}{L} = \log 89 = \ldots\ldots\ldots\ldots 1,9493$$

$$\text{Log } \frac{a^2}{\rho^2} = 2 \log \frac{1}{60,67} = \ldots\ldots\ldots \overline{4},4340$$

$$\text{Log } \frac{\mu}{m} = \log 27,40 = \ldots\ldots\ldots\ldots 1,4377$$

$$\text{Log sin } 23°28'54'' = \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{1},6001$$

$$\text{Log cos } 5°8'48'' = \ldots\ldots\ldots\ldots 1,0472$$

$$\text{Log } 8,5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,9294$$

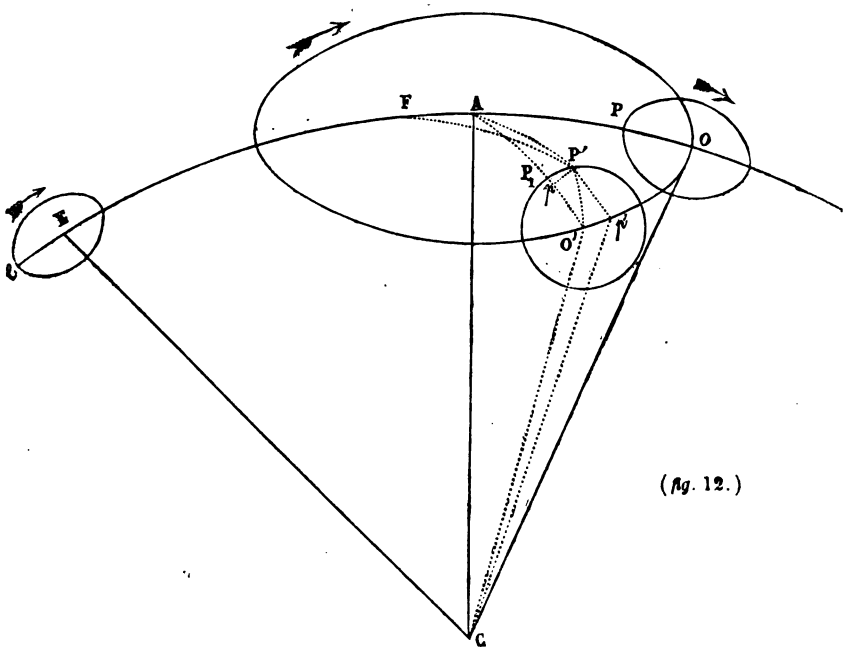
$$\text{d'où Log } \Delta\gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,9998$$

$$\Delta\gamma = 9'',9.$$

Le calcul donne ainsi 9″,9 pour la demi-amplitude de la nutation de l'orbite lunaire; mais ce résultat est un peu trop fort, parce que le moment d'inertie C est moindre en réalité que dans l'hypothèse d'une Terre homogène. Il vaut mieux adopter le nombre 8″,0 qui a été déduit par Burg de l'observation, ou celui de 8″,6, qu'a adopté M. Damoiseau, et l'on voit même que ce nombre pourrait servir à déterminer C, et par suite la loi de la densité dans l'intérieur de la Terre, si la nutation $\delta\psi$ pouvait être déterminée avec une assez grande exactitude.

IV.

Cherchons actuellement la marche que le pôle vrai de l'orbite suit autour du pôle moyen par l'effet de la perturbation qui nous occupe. On sait qu'on peut représenter la nutation de l'axe de la Terre, en faisant décrire à son pôle *e* (*fig.* 12), autour de sa posi-



(*fig.* 12.)

tion moyenne E, une petite ellipse peu excentrique dont le grand axe passe constamment par le pôle de l'écliptique. Ce mouvement

est rétrograde et s'accomplit dans une période de 18 ans $\frac{2}{3}$, de telle manière que le pôle de l'équateur revient au sommet de l'ellipse le plus éloigné du pôle de l'écliptique, toutes les fois que le nœud ascendant de l'orbite passe par l'équinoxe du printemps. A cette même époque, c'est-à-dire lorsque le pôle moyen de l'orbite est en O, son pôle vrai est en P, au minimum de distance du point A, puisque la plus petite valeur de l'angle γ correspond à la plus grande valeur de l'angle θ, et réciproquement. En outre, de ce que les variations de ces deux angles sont proportionnelles, il résulte qu'on peut regarder le point P comme décrivant autour du point O une courbe semblable à celle que décrit le point *e* autour du pôle E, c'est-à-dire une trajectoire sensiblement circulaire.

De l'égalité qui existe entre la durée de la révolution du point O autour du point A et le temps de la nutation de l'orbite, résulte une seconde manière plus simple que la précédente d'interpréter géométriquement cette perturbation. Supposons en effet le point O arrivé en O'. L'inégalité qui nous occupe consiste en ce que le rayon vecteur OP, au lieu d'être venu en $O'P_1$ dans la direction du point A, est venu en O'P', faisant avec $O'P_1$ un angle égal à l'angle OAO'. La trajectoire du pôle vrai P' est une épicycloïde; mais il est facile de montrer que le contour de cette courbe ne s'écarte jamais que d'une petite fraction de seconde, d'une circonférence qui aurait AO pour rayon, et dont le centre F serait situé sur l'arc de grand cercle qui passe par les pôles de l'équateur et de l'écliptique, à une distance de ce dernier égale à OP.

En effet, si l'on considère les petits triangles sphériques de la figure comme rectilignes, et que l'on pose

$$AP' = \delta, \quad AO' = R, \quad O'P' = FA = r, \quad P'AO = \alpha, \quad P'AO' = \beta,$$

on a par le triangle FAP'

$$\overline{FP'}^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r \cos\alpha,$$

et par le triangle AP'O'

$$R^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r \cos(P'O'A + P'AO').$$

Or,

$$P'O'A + P'AO' = P'AO + 2P'AO' = \alpha + 2\beta,$$

d'où

$$R^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r \cos(\alpha + 2\beta).$$

Il vient donc, en comparant les valeurs de $\overline{FP'}^2$ et de R^2,

$$\overline{FP'}^2 - R^2 = 2\delta r\left[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos\alpha\right] = 4\delta r \sin(\alpha + \beta)\sin\beta,$$

d'où

$$\frac{FP' - R}{r} = \frac{4\delta}{FP' + R}\sin(\alpha + \beta)\sin\beta.$$

Or, sin β est toujours moindre que sin 8″, $\frac{4\delta}{FP' + R} < 2$; donc la différence entre FP′ et R est toujours une très-petite fraction de r, et il est aisé de voir qu'elle n'atteint jamais un millième de seconde. On peut donc regarder FP′ comme constant, et par conséquent le pôle de l'orbite comme décrivant une circonférence dont le pôle est en F. En d'autres termes, l'axe de l'orbite décrit un cône circulaire, non pas autour de CA, mais autour de CF, qui est située dans l'angle des lignes CE et CA, et très-faiblement inclinée sur celle-ci. Cette inclinaison est égale à la valeur maximum de $\delta\gamma$, c'est-à-dire à 8″.

Ainsi, l'on peut représenter l'inégalité qui dépend de la nutation de l'axe terrestre et qui provient par conséquent de l'attraction exercée sur la Lune par le ménisque équatorial, en concevant que l'orbe lunaire, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut, avec les mêmes conditions, sur le plan qui a CF pour axe, c'est-à-dire qui passe par les équinoxes entre l'équateur et l'écliptique, avec une inclinaison de 8″ sur ce dernier plan.

La précession, que nous avons laissée provisoirement de côté, consiste en un mouvement conique de CE autour de CA. De même que la nutation, ce phénomène, qui provient, pour la plus grande partie, des attractions mutuelles de la Terre et de la Lune, réagit sur le mouvement de l'axe de l'orbite; mais il ne donne lieu qu'à des inégalités séculaires. Nous ne ferons qu'une remarque sur les

déplacements corrélatifs qui en résultent pour les pôles de l'équateur et de l'orbite : c'est que ces deux points se retrouvent avec le pôle de l'écliptique sur un même grand cercle, toutes les fois que le nœud ascendant revient à l'équinoxe du printemps. C'est sur cet arc de grand cercle qu'est constamment situé le point F qui suit le mouvement de AE, et par conséquent le plan dont ce point est le pôle passe *constamment* par la ligne des équinoxes dont nous parlions tout à l'heure, en suivant le mouvement rétrograde de cette ligne sur le plan de l'écliptique.

V.

De l'équation en latitude que la nutation de l'orbite introduit dans la théorie de la Lune.

Commençons par exprimer en fonction du temps les inégalités dont sont affectés, par suite de cette nutation, l'inclinaison de l'orbite et le mouvement angulaire du nœud; pour cela, nous reprendrons l'équation

$$\mu C \sin\theta\, \delta\theta = -\frac{T.L}{T+L} m\rho^2 \sin\gamma\, \delta\gamma,$$

dans laquelle il faudra substituer à la nutation $\delta\theta$ de l'axe terrestre, son expression analytique.

Cette expression est, d'après le n° 5 du livre V de la *Mécanique céleste*,

$$\delta\theta = \frac{3L}{2\mu\rho^3}\frac{C-A}{C}\frac{1}{i}\sin\gamma\cos\theta\cos it,$$

en désignant par $-it$ la longitude moyenne du nœud ascendant, et l'origine du temps étant fixée au moment où ce nœud coïncide avec l'équinoxe du printemps.

On trouve, en substituant et réduisant,

$$\delta\gamma = -\frac{3}{2}\frac{T+L}{\rho^3}\frac{C-A}{T\rho^2}\frac{1}{mi}\sin\theta\cos\theta\cos it,$$

et comme

$$\frac{T+L}{\rho^2} = m^2,$$

$$\delta\gamma = -\frac{3}{2}\frac{C-A}{T\rho^2}\frac{m}{i}\sin\theta\cos\theta\cos il = -H\cos it,$$

en posant

$$H = \frac{3}{2}\frac{C-A}{T\rho^2}\frac{m}{i}\sin\theta\cos\theta.$$

On a d'ailleurs (*fig.* 12)

$$\delta\gamma = -\frac{PO'}{O'C} = -\frac{P'O'}{O'C}\cos it.$$

Donc

$$H = \frac{P'O'}{O'C}.$$

La même figure donne, pour l'inégalité du mouvement du nœud,

$$\delta\psi = \frac{O'p'}{O'A} = \frac{O'P'\sin it}{O'C.\gamma} = \frac{H}{\gamma}\sin it.$$

D'ailleurs, lorsque nous avons cherché, à la fin du chapitre III, l'équation en latitude qui résultait d'une perturbation dans le mouvement de l'orbite, nous avons trouvé

$$\delta l = \delta\gamma\sin(m-i)\,t - \gamma\delta\psi\cos(m-i)\,t.$$

Donc

$$\delta l = -H[\sin(m-i)\,t\cos it + \cos(m-i)\,t\sin it] = -H\sin mt.$$

Ainsi, les inégalités lunaires en latitude, dues à l'aplatissement de la Terre, se réduisent à une seule qui a pour argument la longitude vraie de la Lune. Ce résultat est conforme à celui que trouve Laplace au chapitre II du livre VII de la *Mécanique céleste*.

Si l'on remet pour H sa valeur, il vient

$$\delta l = -\frac{3}{2}\frac{C-A}{T\rho^2}\frac{m}{i}\sin\theta\cos\theta\sin mt.$$

Cette formule peut nous servir à déterminer l'aplatissement terrestre par l'observation de la Lune; cette observation donne en effet, d'après Burg, pour l'inégalité précédente

$$\delta l = -8'' \sin mt,$$

ou, en exprimant le coefficient en partie du rayon,

$$\delta l = -\frac{8}{206265} \sin mt.$$

On aura donc, en comparant les deux expressions précédentes de δl,

$$\frac{3}{2}\frac{C-A}{T\rho^2} = \frac{2}{\sin 2\theta}\,\frac{i}{m}\,\frac{8}{206265}$$

Remplaçons ρ^2 par $\frac{\rho^2}{a^2}a^2$, a désignant le rayon terrestre; il vient

$$\frac{3}{2}\frac{C-A}{Ta^2} = \frac{1}{\sin 2\theta}\,\frac{i}{m}\,\frac{\rho^2}{a^2}\,\frac{2.8}{206265}$$

Calculons le second membre :

$$\log \frac{1}{\sin 2\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}136$$

$$\log \frac{i}{m} = \log \frac{27{,}32}{6793} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{3}{,}604$$

$$\log \frac{\rho^2}{a^2} = 2 \log .60{,}67 = \ldots\ldots\ldots\ldots 3{,}566$$

$$\log (2.8) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}204$$

$$\log \frac{1}{206265} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6{,}686$$

$$\log \left(\frac{3}{2}\frac{C-A}{Ta^2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{3}{,}196$$

$$\frac{3}{2}\frac{C-A}{Ta^2} = 0{,}001570.$$

On pourrait déduire de là l'*aplatissement mécanique* du sphéroïde terrestre. Pour avoir son aplatissement physique, il faut partir de l'équation suivante, que l'on trouve dans la théorie de la figure des corps célestes (*Mécan. cél.*, liv. V, n° 2, et liv. XIV, n° 3, p. 324) :

$$\frac{3}{2}\,\frac{C-A}{Ta^2} = \alpha h - \frac{1}{2}\,\alpha\varphi,$$

αh étant l'ellipticité du sphéroïde terrestre, et $\alpha\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur. On a

$$\frac{1}{2}\,\alpha\varphi = \frac{1}{2.289} = 0{,}001730.$$

En ajoutant ce nombre à la valeur 0,001570 de $\frac{3}{2}\,\frac{C-A}{Ta^2}$, on trouve

$$\alpha h = 0{,}003300 = \frac{1}{304}.$$

Tel est aussi le nombre donné par Laplace, et l'on voit que l'inégalité en latitude que nous venons d'étudier est très-propre à faire connaître l'aplatissement terrestre avec la même exactitude que les mesures géodésiques; cet aplatissement n'est pas celui de tel ou tel méridien, mais une sorte d'aplatissement *moyen*, indépendant des irrégularités de la figure du globe. Le nombre que nous venons de trouver répond au coefficient 8″,0 adopté par Burg pour la nutation de l'orbite. Si l'on adoptait, avec M. Damoiseau, 8″,6, on arriverait, pour ce même aplatissement, à la fraction $\frac{1}{294}$.

Il n'y a pas lieu de rechercher l'inégalité en latitude qui pourrait provenir de la non-sphéricité de la Lune; car nous avons vu que l'axe de rotation de cet astre se maintenant toujours dans le plan des axes de l'écliptique et de l'orbite lunaire, il en résultait que la nutation de notre satellite ne pouvait produire, dans le mouvement de son orbite, aucune réaction appréciable à l'observation. Telle est aussi la conclusion à laquelle Laplace est parvenu, en

étudiant directement les termes que la non-sphéricité de la Lune pourrait introduire dans la théorie de cet astre; et si l'on cherche le sens géométrique caché sous les formules de la *Mécanique céleste,* on peut s'assurer que ce qui rend ces termes insensibles, c'est justement la coïncidence constante découverte par Cassini entre la ligne des nœuds et celle des équinoxes lunaires.

VI.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

En analysant les effets des diverses causes qui contribuent au déplacement de l'orbite lunaire, nous avons déterminé séparément ceux qui dépendent de l'action du couple accélérateur envoyé par le Soleil, et ceux qui sont dus à la réaction du mouvement de l'axe terrestre. Ces perturbations d'origine différente se superposent d'après la loi ordinaire des petits mouvements, et il résulte de là que la nutation de l'orbe lunaire est indépendante de l'intensité du couple perturbateur, et ne serait pas altérée lors même que ce couple se réduirait à zéro, pourvu qu'il n'y eût rien de changé dans le déplacement de l'axe terrestre. Il faut observer toutefois que, dans la nature, ces deux dernières hypothèses sont inconciliables, puisque la nutation terrestre est intimement liée à la rétrogradation du nœud, et que celle-ci dépend du couple accélérateur.

Nous insisterons encore sur la connexion qui existe entre les principaux phénomènes qui proviennent de la non-sphéricité de la Terre et de son satellite, et qui sont :

1° La précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre;

2° La libration réelle de la Lune;

3° La nutation de l'orbite lunaire.

La plus grande partie de la précession est due, on le sait, à l'action de la Lune sur le ménisque terrestre; c'est cette même cause qui produit la presque totalité de la nutation, laquelle peut être considérée comme une simple inégalité du phénomène précé-

dent, inégalité dont la période est réglée par la durée de la révolution des nœuds de l'orbite.

Cette même durée détermine aussi la période du mouvement conique de l'axe de la Lune autour de l'axe de l'écliptique, mouvement qui constitue la partie de la libration réelle découverte par Cassini. Ce déplacement conique est analogue à la nutation terrestre; mais il n'est pas, comme celle-ci, une simple inégalité de la précession. Dans le sphéroïde lunaire, les deux phénomènes se confondent en un seul; et cela tient, comme le montre clairement la théorie géométrique de la libration, à ce que ce sphéroïde, au lieu d'être un corps de révolution comme notre globe, est un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont le plus grand est constamment dirigé vers la Terre. Il résulte de là, en effet, que l'attraction de la planète sur le ménisque lunaire, en même temps qu'elle établit une égalité constante entre les mouvements moyens de rotation et de révolution du satellite, maintient constamment l'axe de ce dernier dans le plan qui passe par les axes de l'orbite lunaire et de l'écliptique.

La nutation de l'orbite est, comme nous l'avons vu, une réaction des phénomènes précédents; elle a donc pour causes mécaniques l'attraction du ménisque terrestre sur la Lune, et celle du ménisque lunaire sur la planète. Théoriquement, il devrait résulter de cette dernière attraction, aussi bien que de la première, un déplacement de l'orbite que décrit la Lune autour du centre de gravité commun des deux corps; mais nous avons vu que, par suite de la permanence dans un même plan des trois axes dont nous avons parlé plus haut, l'effet de cette action du ménisque lunaire était insensible à l'observation.

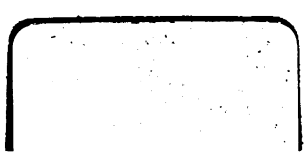
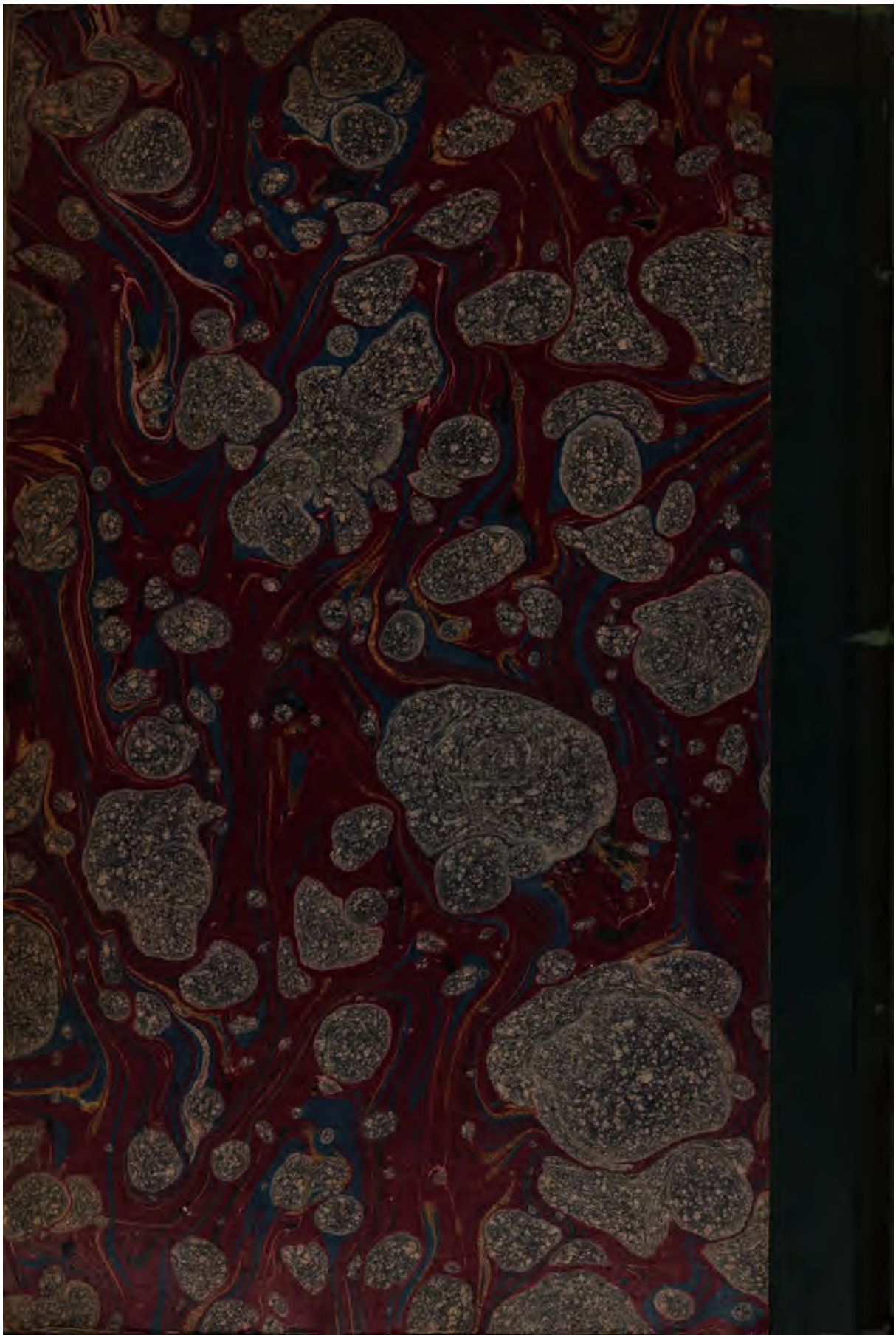
La théorie des couples est éminemment propre à donner une explication claire de cet ensemble de faits astronomiques (1), et nous avons essayé de montrer que, loin de se restreindre à ce qui concerne les corps solides, elle pouvait s'étendre, conformément aux idées de son illustre auteur, à un système de figure variable,

(1) Voir : 1° *Précession des équinoxes;* par M. Poinsot; *Connaissance des temps.* 1858.

2° *Libration réelle de la Lune;* par l'auteur du présent Mémoire. — Mallet-Bachelier. 1857.

du moins en tout ce qui dépendrait analytiquement des équations des aires.

Cette même méthode pourrait s'appliquer avec quelques modifications à plusieurs points de la théorie des satellites de Jupiter et des anneaux de Saturne. Nous nous bornerons ici à quelques remarques qui se présentent d'elles-mêmes.

Nous avons vu que l'inégalité qui constitue la nutation de l'orbe lunaire pouvait se représenter en concevant que cet orbe se meut, avec une inclinaison constante, sur un plan passant constamment par les équinoxes, entre l'écliptique et l'équateur terrestre. Si l'on se reporte aux résultats précédents, on voit facilement que l'angle formé par ce plan fixe et l'écliptique devrait croître avec la grandeur du ménisque de la planète, et diminuer, au contraire, si la distance des deux astres venait à augmenter. On en conclut immédiatement que le phénomène que nous venons de rappeler doit se reproduire d'une manière bien plus sensible dans les mouvements des satellites de Jupiter, et d'autant plus, pour chacun d'eux, qu'il est plus voisin de la planète. L'observation montre en effet que les plans fixes relatifs aux divers satellites, au lieu d'être, comme pour la Lune, très-peu inclinés sur l'orbite de la planète, sont beaucoup moins rapprochés de cette orbite que de l'équateur, et les angles qu'ils font avec ce dernier plan augmentent à mesure que l'on s'éloigne de Jupiter. C'est ainsi que le plan fixe sur lequel se meut l'orbe du premier satellite n'est incliné *sur l'équateur* que de cette inclinaison est de 1′ 5″ pour le second, de 5′ pour le troisième, de 24′ 4″ pour le quatrième.

C'est aussi en vertu de son aplatissement considérable et du grand éloignement du Soleil que Saturne retient son anneau et ses sept premiers satellites dans le plan de son équateur.